제 1장 수열과 급수

어떤 규칙에 따라 배열된 수의 열 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$(간단히 $\{a_n\}$으로 표시한다)을 수열이라고 한다. 수열은 자연수(또는 정수)의 집합 $N(Z)$을 다른 수 집합에 대응시키는 함수 $f(n)=a_n$이다. a_n을 수열 $\{a_n\}$의 일반항이라고 하며 수열의 처음 n항의 합 S_n과 다음 관계를 가진다.

$$\begin{cases} a_1 = S_1 \\ a_n = S_n - S_{n-1} \ (n \geqq 2) \end{cases}.$$

1.1. 등 차 수 열

$a_{n+1} - a_n = d$(상수)이면 $\{a_n\}$을 등차수열이라고 부른다.

(1) a, b의 등차중항; $A = \frac{a+b}{2} \iff a, A, b$는 등차수열을 이룬다.

(2) 첫째항 a, 항수가 n 인 등차수열의 일반항은

$$a_n = a + (n-1)d = dn + (a-d).$$

(3) 처음 n항의 합

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2} = \frac{d}{2} n^2 + \frac{2a_1 - d}{2} n.$$

(4) $m + n = r + s \iff a_m + a_n = a_r + a_s$.

(5) $3S_{2n} = 3S_n + S_{3n}$.

그 외 다른 성질들을 찾아 보아라.

예제 1. 50과 200사이의 수 중에서 3 또는 7로 나누어 떨어지는 수의 합을 구하여라.

풀이

50과 200사이의 수 중에서

3의 배수의 집합 A_3의 원소의 개수는 $\left[\frac{200}{3}\right]-\left[\frac{50}{3}\right]=50$ 개이고,

7의 배수의 집합 A_7의 원소의 개수는 $\left[\frac{200}{7}\right]-\left[\frac{50}{7}\right]=21$ 개다.

또, 3과 7의 최소공배수인 21의 배수의 집합 A_{21}의 원소의 개수는 $\left[\frac{200}{21}\right]-\left[\frac{50}{21}\right]=7$.

따라서, 각 집합의 원소의 합은

$$S(A_3)=\frac{50(51+198)}{2}=6625,\quad S(A_7)=\frac{21(56+196)}{2}=2646,$$

$$S(A_{21})=\frac{7(63+189)}{2}=882$$

이므로, 구하는 수들의 합은

$$6625+2646-882=8389$$.◇

예제 2. 1이 아닌 자연수 n, k에 대해, n^k꼴인 임의의 수는 n개의 연속하는 홀수의 합으로 나타낼 수 있다는 것을 증명하여라.

증명

홀수 a에 대하여 다음 수

$$a+(a+2)+\cdots+(a+2n-2)=n(a+n-1)$$

이 n^k와 같으려면, $a+n-1=n^{k-1}$ 즉,

$$a=n^{k-1}-n+1$$

라 놓아야 한다.◇

예제 3. 수열 $\{a_n\}$ $(a_n\neq 0,\ n1\geq)$이 등차수열이기 위한 필요충분조건은 임의의 정수 $k>2$에 대하여 다음 등식이 성립하는 것이다.

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_{k-1}a_k}=\frac{k-1}{a_1a_k}.$$

증명

(필요조건) $\{a_n\}$이 등차수열이고 d가 공차라면 임의의 $n\geqq 1$에 대하여

$$a_{n+1}-a_n=d$$

이다. 따라서

$$\frac{1}{a_ia_{i+1}}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_i}-\frac{1}{a_{i+1}}\right)(i\geq 1)$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{a_ia_{i+1}}$$

$$=\frac{1}{d}\left[\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_k}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_k}\right)=\frac{1}{d}\cdot\frac{a_k-a_1}{a_1a_k}=\frac{k-1}{a_1a_k}.$$

(충분조건) 임의의 정수 $k>2$에 주어진 등식이 성립한다고 하자. $k=3$이라고 하면

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}=\frac{2}{a_1a_3}\Rightarrow a_3+a_1=2a_2$$

즉 $a_1,\ a_2,\ a_3$은 등차수열을 이룬다. 또 $k=n,\ n-1,\ n-2$라고 하면

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}, \qquad ①$$

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_{n-2}a_{n-1}}=\frac{n-2}{a_1a_{n-1}}, \qquad ②$$

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_{n-3}a_{n-2}}=\frac{n-3}{a_1a_{n-2}}, \qquad ③$$

① - ②, $\dfrac{1}{a_{n-1}a_n}=\dfrac{n-1}{a_1a_n}-\dfrac{n-2}{a_1a_{n-1}}$, ④

② - ③, $\dfrac{1}{a_{n-2}a_{n-1}}=\dfrac{n-2}{a_1a_{n-1}}-\dfrac{n-3}{a_1a_{n-2}}$, ⑤

④ - ⑤,에서 a_1이 각각 같아야 하므로

$$(n-1)a_{n-1}-(n-2)a_n=(n-2)a_{n-2}-(n-3)a_{n-1},$$

즉 $a_{n-1}-a_n=a_{n-2}-a_{n-1}$

위 식은 $n\geq 3$일 때 $a_{n-2},\ a_{n-1},\ a_n$이 등차수열을 이룬다는 것을 설명한다. n의 임의성에 의하여 $\{a_n\}$이 등차수열이라는 것을 알 수 있다.◇

예제 4. $\{a_n\}$이 등차수열이고 a_i 및 공차 d가 모두 0이 아닌 실수일 때 $(i=1,2,\cdots)$ 다음을 증명하여라.

(1) 방정식 $a_i x^2+2a_{i+1}x+a_{i+2}=0(i=1,2,\cdots)$은 공유근을 가닌다. 그 근을 구하여라.

(2) 위 방정식의 다른 한근을 c_i라고 하면 수열 $\left\{\dfrac{1}{c_i+1}\right\}$ $(i=1,2,\cdots)$은 등차수열이다.

증명

(1) $x=-1$일 때 $a_i+a_{i+2}=2a_{i+1}(i=1,2,\cdots)$이므로 $\{a_n\}$은 등차수열이다. 반대로 $\{a_n\}$이 등차수열이면 $x=-1$이다. b를 방정식의 공유근이라고 하면

$$a_i b^2+2a_{i+1}b+a_{i+2}=0$$

$$a_{i+1}b^2+2a_{i+2}b+a_{i+3}=0$$

두 식을 변끼리 빼면

$$(a_{i+1}-a_i)b^2+2(a_{i+2}-a_{i+1})b+(a_{i+3}-a_{i+2})=0.$$

즉,

$$d(b^2+2b+1)=0$$

$d\neq0$이므로 $b^2+2b+1=0$이다.

$\therefore$ $b=-1$, 원 방정식에 대입하여 검산해 보면 $b=-1$은 공유근이다.

(2) $a_{i+1}=a_i+d,\ a_{i+2}=a_i+2d$를 원 방정식에 대입하고 인수분해하면

$$(x+1)(a_i x+a_i+2d)=0$$

$a_i\neq0$이므로 $a_i x+a_i+2d=0$에서 원 방정식의 다른 한 근 $-1-\dfrac{2d}{a_i}$를 얻는다. 따라서

$$c_i=-1-\frac{2d}{a_i}$$

$$\frac{1}{c_{i+1}+1}-\frac{1}{c_i+1}=\frac{a_{i+1}}{2d}-\left(-\frac{a_i}{2d}\right)=\frac{-(a_{i+1}-a_i)}{2d}=-\frac{1}{2}$$

$\therefore$ $\left\{\dfrac{1}{c_i+1}\right\}$은 등차수열이다.◇

1.2. 조 화 수 열

어떤 수열의 각 항의 역수가 등차수열을 이루는 수열을 말한다.

(1) 조화중항; 0이 아닌 세 수 a, H, b가 차례로 조화수열을 이룰 때,

H를 a, b의 조화 중앙이라 한다. $H=\dfrac{2ab}{a+b}$ (조화평균).

(2) $\dfrac{2}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{a_{n+1}}$

그 외 다른 성질들을 찾아 보아라.

예제 5. $a_1=1$, $2a_na_{n+1}=a_n-a_{n+1}\ (n\geq1)$을 만족하는 수열의 일반항 a_n을 구하여라.

풀이

주어진 점화식의 양변을 a_na_{n+1}로 나누면,

$$2=\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}$$

이 되므로 수열 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$은 공차 2인 등차수열이 된다. 첫항은 $\dfrac{1}{a_1}=1$ 이 되므로

$$\frac{1}{a_n}=1+(n-1)\cdot2=2n-1,$$

$$\therefore\ a_n=\frac{1}{2n-1}$$

이와 같이 수열 $\{a_n\}$은 조화수열임을 알 수 있다.◇

예제 6. 임의의 자연수 n에 대하여 수열 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\cdots$로부터 길이가 n인 등차수열을 택할 수 있겠는가?

풀이 택할 수 있다.

$\frac{1}{n!}$, $\frac{2}{n!}$, $\cdots$, $\frac{n}{n!}$은 길이가 n이며 공차가 $\frac{1}{n!}$인 등차수열이다.

이들 수는 $\frac{1}{(n!/k)}$인 수이다. 단, $\frac{n!}{k}$는 정수이어야 한다.

예제 7. 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$이 등차수열을 이룰 때, 다음을 증명하여라.

$$a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + \cdots + a_{n-1}a_n = (n-1)a_1a_n$$

풀이

수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$의 공차를 d라 하면 $\frac{1}{a_k} = \frac{1}{a_{k-1}} + d$이므로

$$a_{k-1}a_kd = a_{k-1} - a_k$$

$$\therefore \sum_{k=2}^{n} a_{k-1}a_kd = \sum_{k=2}^{n}(a_{k-1} - a_k) = a_1 - a_n$$

그런데, $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + (n-1)d$에서 $a_1 - a_n = a_1a_n(n-1)d$이므로

$$\sum_{k=2}^{n} a_{k-1}a_kd = a_1 - a_n = a_1a_n(n-1)d$$

$$\therefore \sum_{k=2}^{n} a_{k-1}a_k = a_1a_n(n-1)$$

Olympiad Mathematics Series01

수열과 급수

연습문제 풀이

제 1 장 수열과 급수

1) 풀이

n번째 시행에 공차가 2^n인 수들이 남음을 발견할 수 있다. 첫항은 언제나 1이므로, 10번째 시행 후 남는 수들은 $a_k = 1+(k-1)\cdot 2^{10}$이다. 정답 $a_2 = 1+2^{10} = 1025$.

2) 풀이

d를 등차수열의 공차라 하고, 다음을 생각하자.

$$\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}} = \frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}} = \frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{a_{k+1}a_k} = \frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{d}.$$

그러므로, 구하는 합은

$$\frac{1}{d}(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}) = \frac{1}{d}\cdot\frac{a_n-a_1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1}}.\Diamond$$

3) 증명

모든 $i=2,3,\cdots,n$에 대하여 a_i-a_1가 S의 원소이므로 $a_i > a_1$이다. 그러므로 a_1이 S의 원소중에서 최소값이다. $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$을 작은 것부터 차례로 바꿔 배열한 것을 $b_1(=a_1), b_2, b_3, \cdots, b_n$이라 하면 $b_2-b_1 < b_3-b_1 < \cdots < b_n-b_1 < b_n$이다.

$S' = \{b_2-b_1, b_3-b_1, \cdots, b_n-b_1\} \subset S = \{b_1, b_2, b_3, \cdots, b_{n-1}, b_n\}$이므로 S와 S'의 각각에 대하여 작은 순서대로 세어서 제 i번째 $(i=1,2,\cdots,n-1)$의 원소까지는 서로 같다. 그러므로 $b_i - b_1 = b_{i-1}$ $(i=2,3,\cdots,n)$이다. 따라서 수열 $\{b_i\}$는 첫째항이 $b_1(=a_1)$이고 공차가 $b_1(=a_1)$인 등차수열이다.$\Diamond$

4) 증명

주어진 수들 중에 쌍쌍이 서로 다른 수들이 4개보다 많을 수 없다는 것을 증명하자. 같은 수들을 함께 묶고, 각 묶음에서 수를 하나씩 잡아, 선택된 수들을 감소하는 순서로 배열하자: $a>b>c>d>e>\cdots$. 조건에 의해, 수 a,b,c,d는 등비수열을 이룬다. 그리고, $ab>cd$, $ac>bd$이므로, $ad=bc$, 즉 $d=\frac{bc}{a}$. 같은 방법으로, $e=\frac{bc}{a}$을 보일 수 있다.
$\Diamond$

5) 풀이

주어진 조건에 의하여

$$2b_n = a_n + a_{n+1} \quad ①$$

$$a_{n+1}^2 = b_n b_{n+1} \quad ②$$

$\{a_n\}, \{b_n\}$이 양의 수열이므로 ②에서

$$a_{n+1}=\sqrt{b_nb_{n+1}},\ a_{n+2}=\sqrt{b_{n+1}b_{n+2}}$$

이를 ①식에서 $2b_n=a_n+a_{n+1}$에 대입하고 양변을 $\sqrt{b_{n+1}}$로 나누면

$$2\sqrt{b_{n+1}}=\sqrt{b_n}+\sqrt{b_{n+2}}.$$

즉 $\{\sqrt{b_n}\}$은 등차수열이다.

$b_1=2,\ a_2=3,\ a_2^2=b_1b_2$이면 $b_2=\frac{9}{2}$이므로

$$\sqrt{b_n}=\sqrt{2}+(n-1)\left(\frac{\sqrt{9}}{2}-\sqrt{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(n+1)$$

즉 $b_n=\frac{(n+1)^2}{2}$.

$$a_n=\sqrt{b_{n-1}b_n}=\sqrt{\frac{n^2}{2}\cdot\frac{(n+1)^2}{2}}=\frac{n(n+1)}{2}\ (n\geq 1).\diamond$$

6) 풀이

주어진 조건에 의하여

$$a_{k+1}^3=\sum_{i=1}^{k+1}a_i^3-\sum_{i=1}^{k}a_i^3=\left(\sum_{i=1}^{k+1}a_i\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{k}a_i\right)^2$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{k+1}a_i-\sum_{i=1}^{k}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{k+1}a_i+\sum_{i=1}^{k}a_i\right)$$

$$=a_{k+1}\left(a_{k+1}+2\sum_{i=1}^{k}a_i\right)$$

$$\therefore a_{k+1}^2=a_{k+1}+2\sum_{i=1}^{k}a_i \qquad ①$$

따라서 $a_k^2=a_k+2\sum_{i=1}^{k-1}a_i$ ②

①-②,

$a_{k+1}^2-a_k^2=a_{k+1}-a_k+2a_k=a_{k+1}+a_k$,

$a_{k+1}-a_k=1.$

즉 $\{a_n\}$은 공차가 1인 등차수열이다. 또 $a_1=1$이므로 $a_n=n$이다.◇

7) 증명

한편으로는

$$\sum_{j=1}^{n}\left((j+1)^{k+1}-(j-1)^{k+1}\right)=(n+1)^{k+1}+n^{k+1}-1$$

이 성립하며, 다른 한편으로 이 합은 $2S$이다.◇

8) 풀이

정답. 1

9) 풀이

주어진 다면체에서 k개의 모서리를 가지는 면의 수를 F_k로 나타내자.

$k=3,4,5,6,\cdots$이면 이에 대응하는 면의 각은 각각 $\pi,2\pi,3\pi,4\pi,\cdots$이므로 다면체의 모든 면각의 합을 S라 하면

$$S=\pi(F_3+2F_4+5F_5+\cdots) \quad (1)$$

또한 다면체의 모서리의 개수의 합을 E라 하면

$$2E=(3F_3+4F_4+5F_5+\cdots) \quad (2)$$

따라서 (1)과 (2)에 의하여

$$\frac{S}{\pi}+2E=4F_3+6F_4+8F_5+10F_6+\cdots$$

또는 $S=2m\pi A$(m은 적당한 정수).

제외한 꼭지점을 M, M에서의 면각을 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$라 하고 $S'=\alpha+\beta+\gamma+\cdots$라 하면,

$0<S'<2\pi$이고

$$s-s'=2m\pi-S'=1994^\circ=10\pi+194^\circ$$

$\therefore$ $0<S'=2\pi(m-5)-194^\circ<2\pi$인 정수 m은 6이다.

$\therefore$ $S'=166^\circ$ 이고 $S=1994^\circ+166^\circ=2160^\circ=12\pi$.◇

10) 풀이

$$a^2=\frac{4}{9}(10^{100}-1)\times10^{100}+\frac{8}{9}(100^{99}-1)\times10+9$$

$$=\frac{1}{9}(4\times10^{200}+4\times10^{100}+1)=\frac{1}{9}(2\times10^{100}+1)^2$$

$$=\left(\frac{2\times10^{100}+1}{3}\right)^2$$

그러므로,

$$a=\underbrace{666\cdots\cdots67}_{99\text{개}}.$$◇

11) 풀이

$x_{n+1}-x_n=y_n$ 이므로 $x_n=x_1+\sum_{k=1}^{n-1}y_n$ ……①

$y_{n+1}-y_n=3x_n$ 이므로 $y_n=y_1+3\sum_{k=1}^{n-1}x_n$ ……②

$y_1=6$ 이므로 ②에서 $y_n=6+3\sum_{k=1}^{n-1}x_k=3(2+\sum_{k=1}^{n-1}x_k)$

여기서 $2+\sum_{k=1}^{n-1}x_k=A(n)$ 이라 하면 $y_n=3A(n)$ …③

따라서, y_n을 3으로 나눈 나머지는 0이다.

$x_1=2$ 이므로 ①, ③에서 $x_n=2+3\sum_{k=1}^{n-1}A(k)$

따라서, x_n을 3으로 나눈 나머지는 2이다.◇

12) 풀이

좌변을 변형하면

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

이므로 우변을 얻는다.◇

13) 증명

구하는 분수는 다음과 같다.

$$\left(1+\frac{1}{p-1}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p-2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\frac{p-1}{2}+\frac{p+1}{2}}\right)$$

$$=p\left(\frac{1}{p-1}+\frac{1}{2(p-2)}+\cdots+\frac{1}{\left(\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{p+1}{2}\right)}\right)=p\frac{M}{(p-1)!}.$$

이제 M이 p로 나누어 떨어진다는 것을 증명해야 한다.

$x\equiv\frac{(p-1)!}{k(p-k)}\pmod{p}$라 하자. 그러면,

$$xk(p-k)\equiv(p-1)!\pmod{p}$$

가 성립한다. Wilson의 정리에 의해 $(p-1)!\equiv-1\pmod{p}$이므로,

$$-xk^2\equiv-1\pmod{p}$$

이다. 이제, k가 $1,2,\cdots,\frac{p-1}{2}$을 취할 때, x는 $1^2,2^2,\cdots,\left(\frac{p-1}{2}\right)^2$을 취한다는 것을 쉽게 확인할 수 있다. 실제로, k^2은 모든 제곱잉여를 취한다. 각각의 k에 대해, k의 잉여역수 k^*를 잡을 수 있다. 즉,

$$kk^*\equiv1\pmod{p}.$$

이 때, k^{*2} 또한 모든 제곱잉여를 취하며,

$$k^*\equiv x\pmod{p}$$

이다. 결국,

$$M\equiv1^2+2^2+\cdots+\left(\frac{p-1}{2}\right)^2\pmod{p}$$

을 얻을 수 있다.

$$\sum_{k=1}^{\frac{p-2}{2}}k^2=\left(\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{p+1}{2}\right)\left(\frac{p}{6}\right)$$

이므로 M은 p로 나누어 떨어진다.◇

14) 풀이

$b\neq1$, k번째 항은

$$(1+b+b^2+\cdots+b^{k-1})a^{k-1}=\frac{a^{k-1}}{1-b}-\frac{b(ab)^{k-1}}{1-b}(k=1,2,\cdots,n-1)$$

따라서 원 수열의 처음 n항의 합은

$$S_n=(\frac{1}{1-b}-\frac{1}{1-b})+(\frac{a}{1-b}-\frac{b\cdot ab}{1-b})+\cdots+[\frac{a^{n-1}}{1-b}-\frac{b(ab)^{n-1}}{1-b}]$$

$$=(\frac{1}{1-b}+\frac{a}{1-b}+\cdots+\frac{a^{n-1}}{1-b})-[\frac{b}{1-b}+\frac{b\cdot ab}{1-b}+\cdots+\frac{b(ab)^{n-1}}{1-b}]$$

$$=\frac{1}{1-b}(1+ab+\cdots+a^{n-1})-\frac{b}{1-b}[1+ab+\cdots+(ab)^{n-1}]$$

$$=\frac{1}{1-b}\cdot\frac{1-a^n}{1-a}-\frac{b}{1-b}\cdot\frac{1-(ab)^n}{1-ab}.\diamond$$

15) 풀이

$h(k)=\frac{1}{2}\{k^2+(4n-k)^2\}$ 이라 하면, $h(k)=h(4n-k)$ 이다.

$f(k)=16n^2-12nk+3k^2$, $g(k)=k^3(8n^2-4nk+k^2)$ 라고 하자.

$f(k)=3h(k)-8n^2$, $g(k)=k^3h(k)$ 이다.

그러면 $f(k)=f(4n-k)$이고

$$g(k)+g(4n-k)=h(k)\{k^3+(4n-k)^3\}$$
$$=4n\,h(k)(16n^2-12nk+3k^2)$$
$$=4n\,h(k)f(k)$$

따라서,

$$\sum_{k=1}^{4n}\frac{8n^2k^3-4nk^4+k^5}{16n^2-12nk+3k^2}=\sum_{k=1}^{4n}\frac{g(k)}{f(k)}=\sum_{k=0}^{4n}\frac{g(k)}{f(k)}$$
$$=\frac{g(2n)}{f(2n)}+\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{g(k)+g(4n-k)}{f(k)}=8n^3+\sum_{k=0}^{2n-1}4n\,h(k)$$
$$=2n[(2n)^2+\sum_{k=0}^{2n-1}\{k^2+(4n-k)^2\}]=2n\sum_{k=1}^{4n}k^2$$
$$=\frac{4n^2(4n+1)(8n+1)}{3}$$

(다른 풀이)

준 식을 $\displaystyle\sum_{k=1}^{4n}\frac{\frac{k^3}{2}\{k^2+(4n-k)^2\}}{\frac{3}{2}\{k^2+(4n-k)^2\}-8n^2}$ 와 같이 변형하면 $k^2+(4n-k)^2$가 $k=2n$을 중심으로 대칭이 되는 식이므로 양 끝부터 각각 한 쌍씩의 합이 같다는 것을 알 수 있다.◇

16) 풀이

수열의 일반항은

$$a_n = \frac{1}{(n+2)\cdot n!} = \frac{n+1}{(n+1)(n+2)\cdot n!}$$
$$= \frac{(n+2)-1}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!}\,(n\geq 1).$$
$$\therefore S_n = \left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}\right)+\cdots+\left[\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}\right]$$
$$= \frac{1}{2!}-\frac{1}{(n+2)!} = \frac{1}{2}-\frac{1}{(n+2)!}.\diamond$$

17) 풀이

$k^4+k^2+1=(k^2+1)^2-k^2=(k^2-k+1)(k^2+k+1)$ 이므로

$$\frac{k}{k^4+k^2+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2-k+1}-\frac{1}{k^2+k+1}\right)$$

따라서

$$\sum_{k=1}^{100}\frac{k}{k^4+k^2+1} = \sum_{k=1}^{100}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2-k+1}-\frac{1}{k^2+k+1}\right).\diamond$$
$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{100^2+100+1}\right)=\frac{5050}{10101}$$

18) 풀이

$\gcd(m, n)=1$라 가정하면, x, y에 관한 방정식 $nx=my+1$은 $\{1,2,\cdots,m-1\}$에서 해를 갖는다.(4단원 예제5) 방정식을 다시 $nx=m(y-1)+m+1$ 꼴로 나타낼 수 있다. 이제 원주위에 m개의 양의 정수 $x_1, x_2, \cdots, x_m$이 놓여있다 가정하자. 가장 작은 수 x_1으로부터 원주 위를 따라 n개의 수의 블록을 정하고 각각의 수를 1씩 증가시킨다. 이러한 과정을 m번하면 원주를 n바퀴 돌게 된다. 게다가 첫 번째 수는 다른 수들 보다 1이 더 더해진다. 이렇게 하면, $|x_{\max}-x_{\min}|$는 1만큼 감소한다. 이러한 과정은 매번 최소의 원소를 맨 앞에 위치시키며 최대 원소의 값과 최소 원소 값의 차가 0이 될 때까지 반복된다.

그러나 만일 $\gcd(m, n)=d>1$이면, 그러한 감소의 과정이 언제나 가능한 것은 아니다. m개의 숫자 중 하나를 2라 하고 나머지 원소들은 모두 1이라 하자. 같은 과정을 k번 반복해서 적용하여 모든 수가 $(m+1+kn)$인 m개의 분포가 되었다고 가정해 본다. 이것은 $m+1+kn\equiv 0 \bmod m$임을 의미한다. 그러나 $d>1$이므로 d는 $m+kn+1$을 나눌 수 없다. 따라서 m은 $m+1+kn$을 나누지 못한다. 모순!

(다른 풀이)

m개의 정수 중 n를 택하여 1씩 더하면, m개의 정수의 합은 매 단계마다 n이 증가한다. 만일 모든 수가 같게 되면 m개의 수의 합은 m의 배수이므로, 처음 m개의 수의 합으로부터 nx를 더하여 my가 되는 양의 정수 (x, y)가 존재해야 한다. 즉, $\sum_{k=1}^{m}x_k+nx=my$. 그런데 $\sum_{k=1}^{m}x_k=S$는 임의의 값이므로 $1=nx+my$ (x, y은 정수)이