초**중**고급 올림피아드 수학

올림피아드 고득점을 위한

조합론 강의

지은이 신 동 관

mail to: kwan0912@naver.com

°o°o°o°o°o 목 차 o°o°o°o°o°

제 1단원. 조합의 원리와 기법 ·················· p005

제1장 대응의 원리와 문제 해결의 전략 ·················· p007
제2장 비둘기 집의 원리 ·················· p020
제3장 순열과 조합, 이항계수 ·················· p025
제4장 포함과 배제의 원리 ·················· p030
제5장 점화식 ·················· p033
제6장 생성함수 ·················· p035
제7장 조합 논리와 그래프이론 ·················· p039

제 2단원. 순열, 조합, 이항계수

제1장 경우의 수 ·················· p047
제2장 순열 ·················· p059
제3장 조합 ·················· p074

제 3단원. 점화식 ·················· p093

제1장 기본적인 점화식 ·················· p095
제2장 특별한 점화식 ·················· p121

제 4단원. 포함과 배제의 원리와 비둘기 집의 원리 ········· p143

제1장 포함과 배제의 원리 ·················· p145
제2장 비둘기집의 원리 ·················· p157

제 5단원. 대응의 원리와 푸비니의 원리 ·················· p171

제1장 대응의 원리 ·················· p173
제2장 푸비니의 원리 ·················· p176

제 6단원. 그래프 이론의 기초와 활용 ·················· p187

제1장 그래프의 기본성질 ·················· p189
제2장 그래프의 활용 ·················· p203

제 7단원. 생성함수 ·················· p219

제1장 일반생성함수 ·················· p220
제2장 지수생성함수 ·················· p230
제3장 생성함수의 활용 ·················· p233

제 8단원. 여러 가지 조합 논리 ·················· p245

제1장 조합적 집합론 ·················· p247
제2장 조합 항등식과 부등식 ·················· p264
제3장 조합 기하와 조합 설계 ·················· p275

풀이와 해설 (별책으로 구성) ·················· p294

이 책은 제목에서 나타난 대로 필자가 실제 강의를 진행하며
작성한 원고를 토대로 보강하여 써낸 책자입니다.
고급 올림피아드에로의 디딤돌이 되어드리겠다는 목표를 두고!
열정을 가진 학생 여러분을 위해!!

올림피아드 조합론 강의

제 1단원. 조합의 원리와 기법

제1장 대응의 원리와 문제 해결의 전략 ·· p007

ㄴ1절. 대응의 원리 ················ p007

ㄴ2절. 여러 가지 문제 해결의 전략 ················ p009

제2장 비둘기 집의 원리 ············ p020

ㄴ1절. 존재성의 원리 ················ p020

ㄴ2절. 램지의 정리 (Ramsey's Theorem) ······ p022

ㄴ 연 습 문 제 ················ p023

제3장 순열과 조합, 이항계수 ············ p025

ㄴ1절. 경우의 수 - 합의 법칙과 곱의 법칙········· p025

ㄴ2절. 순열 ················ p026

ㄴ3절. 조합 ················ p027

ㄴ4절. 이항계수 ················ p028

제4장 포함과 배제의 원리 ············ p030

ㄴ1절. 포함과 배제의 원리 ················ p030

ㄴ2절. 교란순열(Derangement)의 수 ················ p032

제5장 점화식 ············ p033

제6장 생성함수 ············ p035

제7장 조합 논리와 그래프이론 ············ p039

ㄴ 연 습 문 제 ················ p042

제1장. 대응의 원리와 문제 해결의 전략

1절. 대응의 원리

조합론 또는 조합수학은 어떤 집합의 원소들을 원하는 유형별로 배열하고자 할 때, 그 배열의 존재성과 배열의 개수를 세는 방법을 연구한다. 또, 그러한 배열의 관계와 성질을 연구하고 그 응용을 꾀하는 것이다.

99마리의 양떼를 세는 것을 10전자리 동전 9개와 5전짜리 동전 1개, 1전짜리 동전 4개로 대신할 수 있다. 무릇 센다는 것은 대응의 원리를 의미하며 이러한 대응의 원리를 통해 우리는 어려운 셈 문제를 수월하게 해결할 수도 있다.

정 의 단사(injection), 전사(surjection), 전단사(bijection)

유한집합 A, B가 있을 때, 대응 $f: A \to B$가 x_1, $x_2 \in A$에 대해 $x_1 \neq x_2$일 때 $f(x_1) \neq f(x_2)$이면 f를 '단사(單射)'라 한다.

또, 임의의 $y \in B$에 대해 $f(x) = y$를 만족하는 $x \in A$가 존재하면 f를 '전사(全射)'라 한다.

만일 f가 단사인 동시에 전사이면 이를 '전단사(全單射)'라 한다.

대응의 원리란 다음의 집합과 함수에 관한 원리를 말한다.

정리 1.1 단사의 원리(Injection Principle)

두 유한 집합 A, B에 대해 단사 $f: A \to B$가 존재하면 $n(A) \leq n(B)$이다.

정리 1.2 전사의 원리(Surjection Principle)

두 유한 집합 A, B에 대해 전사 $f: A \to B$가 존재하면 $n(A) \geq n(B)$이다.

정리 1.3 전단사의 원리(Bijection Principle)

두 유한 집합 A, B에 대해 전단사 $f: A \to B$가 존재하면 $n(A) = n(B)$이다.

이로부터 우리는 셈하기 곤란한 집합 A의 배열을 일대일 대응을 통해 잘 알고 있는 집합 B에 대응시킴으로써 쉽게 셈할 수 있게 된다.

예제 1-1 $n(A)=m$일 때 $2^A=\{X \mid X\subset A\}$인 집합의 원소의 개수 $n(2^A)$를 구하여라.

해설 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$일 때 $X=\{a_1, a_3, a_m\}$는 $1010\cdots01_{(2)}$로 나타낼 수 있다.

풀이 m개의 원소에 번호를 주고 A의 부분집합에 a_i가 속할 때 이진수열의 i번째 자리에 1이 오도록 각 부분집합을 이진수열에 일대일 대응시킬 수 있다.
그러면, 가능한 이진수열의 개수는 2^m가지가 됨을 알 수 있다.
따라서, $n(2^A)=2^{n(A)}=2^m$이다.

문제 1-1 6×4 개의 격자점으로 이루어진 직사각형의 왼쪽 아래의 점에서 오른쪽 위의 점까지의 최단 이동경로의 개수를 구하여라. 단, 이진수열로의 전단사 원리를 이용할 것.1)

때로는 반대로 생각한다.

예제 1-2 집합 $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$으로부터 인접하지 않은 k개의 수를 선택하는 경우의 수를 구하여라.

해설 7개 중 3개의 연속되지 않은 수를 선택할 때 선택되지 않은 4개의 수를 생각하면, 양끝을 포함하여 5개의 자리에 선택된 3개의 수가 놓일 수 있다. $\binom{5}{3}=10$.

풀이 n개로부터 k를 선택하고 나면 $n-k$개의 숫자가 남는데, 이때 남아 있는 숫자 사이 사이의 자리 $n-k+1$에 선택된 k의 숫자가 들어가는 경우의 수를 생각하면 된다.

$$\binom{n-k+1}{k}.$$

문제 1-2 집합 $X=\{1, 2, 3, \cdots, n\}$의 부분집합 중에서 연속한 자연수를 포함하지 않는 것들의 집합 A와 집합 $Y=\{1, 2, \cdots, n-r+1\}$의 부분집합 사이의 전단사를 하나 만들어 보아라.2)