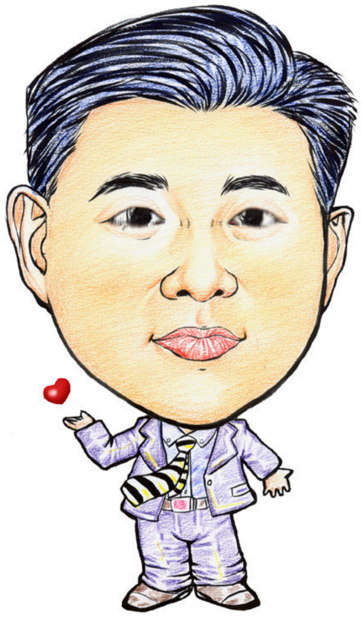
Mathematics Only One!

올림피아드 신샘 수학교실

중등과정 심화편 해석 · 조합

☆ 16개년간 최상급 경시 기출문제 고밀도 분석집!



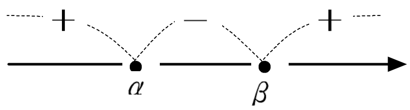
5. 부등식

1. 2차부등식

☞ $ax^2+bx+c>0$,　$ax^2+bx+c<0$**의 해법**

(1) $b^2-4ac>0$일 때, 인수분해한 다음 아래 요령으로 푼다.

- ▶ **α, β가 실수이고, $\alpha<\beta$일 때**
- ▶ $(x-\alpha)(x-\beta)>0 \Rightarrow x<\alpha$ or $x>\beta$
- ▶ $(x-\alpha)(x-\beta)<0 \Rightarrow \alpha<x<\beta$



(2) $b^2-4ac=0$, $b^2-4ac<0$ 일 때, 완전제곱의 꼴로 변형하여 푼다.

[예제] *1.* 고차부등식의 해법 ⇒ 그래프를 이용한다.

다음 부등식을 풀어라.[1]

(1) $(x-1)(x-2)(x-3)<0$

(2) $x^3+2\geq 2x^2+x$

(3) $(x-1)(x-3)(x-4)(x-5)<0$

[예제] *2.* 분수부등식의 해법 ⇒ 고차부등식의 동치관계로 변형한다.

다음 분수부등식을 풀어라.[2]

(1) $\dfrac{x-4}{x-1}>0$

(2) $\dfrac{x-4}{x-1}<0$

(3) $\dfrac{x-4}{x-1}\geq 0$

(4) $\dfrac{x-4}{x-1}\leq 0$

[예제] *3.* 무리부등식의 기본해법 ⇒ 무리식의 기본성질이용

부등식 $\sqrt{x^2-3x-10}>x-4$를 풀어라.[3]

2. 대소판정과 절대 부등식

1 두 실수(또는 두 식) P, Q의 대소 판정

(1) P에서 Q를 빼어 본다.

P−Q>0 ⇔ P>Q, P−Q<0 ⇔ P<Q, P−Q=0 ⇔ P=Q

(2) P^2에서 Q^2를 빼어 본다.

P≧0, Q≧0 일 때, $P^2-Q^2>0$ ⇔ P>Q

(3) P, Q의 비를 구해 본다.

P>0 Q>0 일 때,

$\frac{P}{Q}>1 \Leftrightarrow P>Q,\quad \frac{P}{Q}<1 \Leftrightarrow P<Q,\quad \frac{P}{Q}=1 \Leftrightarrow P=Q$

2 거듭제곱, 거듭제곱근의 부등식

(1) a, b의 양, 0, 음에 관계없이 $a>b \Leftrightarrow a^3>b^3$

(2) $a>0$, $b>0$ 일 때, $a^2>b^2 \Leftrightarrow a>b$

일반적으로 다음 관계가 성립한다.

▶ **$a>0$, $b>0$ 이고, n이 양의 정수이면**

$a>b \Leftrightarrow a^n>b^n,\quad a>b \Leftrightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$

3 기본적인 절대부등식

a, b, c 가 실수일 때,

(1) $a^2\pm 2ab+b^2\geqq 0$ ◀ $a^2+b^2\geqq 2ab$

(2) $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\geqq 0$ ◀ $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca\geqq 0$

(3) $\frac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}\geqq\frac{2ab}{a+b}$ $(a>0,\ b>0)$ ◀ $A\geqq G\geqq H$ **(산술평균 ≧ 기하평균 ≧ 조화평균)**

☞ **등호가 성립하는 조건을 반드시 살피도록 하자.**

[예제] 4. $a>b$, $c>d$일 때, $a-d$와 $b-c$의 대소를 비교하여라.4)

[예제] 5. $a>0, b>0$일 때, 다음 두 수의 대소를 비교하여라.5)

$\sqrt{2(a+b)}$, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$

[예제] 6. 2^{30}과 10^9의대소를 비교하여라. 단, $2^{10}>1000$이다.6)

[예제] 7. 다음 수들의 대소를 비교하여라.7)

(1) $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{10}$

(2) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[6]{10}$

[예제] 8. $3(a^2+b^2+c^2)\geqq(a+b+c)^2\geqq 3(ab+bc+ca)$ 임을 증명하시오.8)

3. 여러 가지 부등식

(1) 젠센 부등식(Jensen's Inequallity)

함수 $f(x)$가 구간 $(a<x<b)$에서 아래로 볼록이고 모든 i에 대해 $x_i \in (a, b)$이고

$a_i > 0$일 때, $a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ 이면, 다음 부등식이 성립한다.

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \leqq \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i)$$

(2) 산술평균(A) ≧ 기하평균(G) ≧ 조화평균(H)

$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n > 0$일 때, 일반적으로 다음이 성립한다.

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geqq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$$

단, 등호는 $a_1=a_2=\cdots=a_n$일 때 성립한다.

(3) 코쉬-슈바르츠 부등식(Cauchy-Schwarz inequallity)

모든 i에 대하여 $a_i,\ x_i$가 실수 일 때($i=1,2,\cdots,n$), 다음이 성립한다.

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2) \geqq (a_1x_1+a_2x_2+\cdots+z_nx_n)^2$$

단, 등호는 $\frac{a_1}{x_1}=\frac{a_2}{x_2}=\cdots=\frac{a_n}{x_n}$일 때 성립한다.

(4) 재배열 부등식(Rearrangement Inequallity)

［예제］ ***9.*** [9)]

(1) 10원, 50원, 100원, 500원 짜리 동전들이 있다. 같은 종류의 어떤 동전은 3개, 또다른 동전은 4개, 또다른 동전은 5개, 마지막 종류의 동전은 6개로 묶어서 모두 18개의 동전, 4가지 종류를 집어 가져갈 수 있을 때, 가장 적은 액수와 가장 많은 액수는 얼마인가?

(2) $a \geqq b,\ c \geqq d$일 때, $ac+bd \geqq ad+bc$ (등호는 $a=b$ 또는 $c=d$일때)가 성립한다.

(3) $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n,\ \ b_1 \geqq b_2 \geqq \cdots \geqq b_n$이고, 수열 $\{a_k'\}, \{b_k'\}$이 각각 $\{a_k\}, \{b_k\}$의 재배열일 때, 다음이 성립한다.

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n \geqq a_1'b_1'+\cdots+a_n'b_n' \geqq a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1$$

(4) 체비세프(Chebyshev) 부등식

수열 $\{a_k\}, \{b_k\}$이 같은 순서로 오름차순 또는 내림차순으로 정렬되어 있을 때,

$$\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{n} \geqq \frac{a_1+\cdots+a_n}{n} \cdot \frac{b_1+\cdots+b_n}{n} \geqq \frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}$$

§1. 기초적인 부등식

[예제 10.] 절대값 기호를 포함한 식의 계산

$ax>0$, $bx<0$ 일 때, $|ab|-\sqrt{(1-ab)^2}+|ab-10|$ 을 계산하라.10)

11. $1+2+3+\cdots+(2n-1)=n^2$ 과 절대값에 관한 성질을 이용하여 $x=998\frac{998}{999}$ 일 때, $|x-1|+|x-2|+\cdots\cdots+|x-1996|$의 값을 구하라.11)

12. 세 실수 a, b, c 가 $|a|+a=0$, $|ab|=ab$, $|c|-c=0$을 만족할 때, $\sqrt{b^2}-\sqrt{(c-b)^2}-|a+b|+|a-c|$를 간단히 하라.12)

13. $|(m-3)+(m-8)|=|m-3|+|m-8|$ 일 때, m의 값의 범위를 정하라.13)

[예제 14.] 삼각형의 조건

길이가 16인 막대를 잘라서 세 변의 길이가 모두 자연수인 삼각형을 만들 때, 만들 수 있는 삼각형의 개수를 구하여라. (단, 막대는 서로 겹치지 않도록 연결하고, 서로 합동인 삼각형은 한 가지로 본다.)14) [제9회 KMC 중2, 15점]

15. 세 변의 길이가 a, b, c이고, $a<b<c=20$ 인 둔각삼각형 중 a 의 최대값을 구하고, 이 때, b 의 값을 구하시오.15)