올림피아드 수학 시리즈 02. 함수방정식

목　　　　차

제 1 장 함수의 기본 성질

1.1. 함수의 기본 개념

정의1.1.1. 함수

공집합이 아닌 두 집합 X와 Y에 대하여 X의 각 원소 x에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응(Exist olny one)할 때, 이 대응관계를 X에서 Y로의 함수라 한다. 이 대응관계를 f로 나타낼 때, x에 대응되는 Y의 원소를 $f(x)$ 로 나타낸다. 이 때, 함수 f를 $f:X\to Y$, $y=f(x)$ 로 나타내고, $\{f(x)\mid x\in X\}$를 f의 치역, X를 f의 정의역, Y를 f의 공역이라 부른다.

1. 예제 공집합이 아닌 임의의 집합 A에 대하여 A의 부분집합들을 모두 모아놓은 집합을 $P(A)$ 라 하자. A에서 $P(A)$ 위로의 함수가 존재하지 않음을 증명하여라.

증명

임의의 함수 $g:A\to P(A)$ 를 생각하자.
$B=\{a\mid a\in A-g(a)\}$ 라 하자. 그러면, $B\subset A$ 이므로 $B\in P(A)$ 이다.
만약, $a_0\in A$ 가 있어서, $g(a_0)=B$ 라 하자.
그러면 $a_0\in B \Leftrightarrow a_0\in A-g(a_0) \Leftrightarrow a_0\in A-B$ 이므로 모순이다.(*)
따라서, B는 g의 치역에 없는 원소이다.
따라서, g는 A에서 $P(A)$ 위로의 함수가 될 수 없다.
그러므로 A에서 $P(A)$ 위로의 함수는 없다.◇

참고 (*)에서 만일 $a_0\not\in B$이면,
$a_0\not\in B \Leftrightarrow a_0\not\in A-g(a_0) \Leftrightarrow a_0\not\in A-B$ 이므로 역시 모순이다.
이것은 칸토어의 증명이다.

참고 크기가 같은 집합사이에는 일대일 대응관계가 성립한다고 정의한다면,
일대일함수 $g:A\to P(A)$ 가 존재할 수 없으므로 집합 $P(A)$는 집합 A보다 크기가 더 큰 집합이다. 이것은 귀납적으로 확인할 수 있다.

정의1.1.2. 함수의 상등

두 함수 $f_1 : X_1 \to Y_1$, $f_2 : X_2 \to Y_2$ 에 대하여 $X_1 = X_2$ 이고, 모든 $x \in X_1$ 에 대하여 $f_1(x) = f_2(x)$ 이면 $f_1 = f_2$ 로 나타낸다.

참고 임의의 세 함수 f, g, h 에 대하여

$$f = f,\ \ f = g \Rightarrow g = f,\ \ f = g \text{ 이고 } g = h \Rightarrow f = h$$

임이 알려져 있다.◇

정의1.1.3. 항등함수

모든 $x \in X$ 에 대하여 $i_X(x) = x$ 를 만족하는 함수 $i_X : X \to X$ 를 X 에서의 항등함수라 부른다.

정의1.1.4. 합성함수

두 함수 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ 에 대하여,
모든 $x \in X$ 에 대하여 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ 로 정의되는 함수 $g \circ f : X \to Z$ 를 f 와 g 의 합성함수라 부른다.

참고 세 함수 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to W$ 에 대하여

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

이 성립하지만, $f \circ g \neq g \circ f$ 임이 알려져 있다.

정의1.1.5. 일대일함수와 일대일 대응

함수 $f : X \to Y$ 가 있다. 서로 다른 임의의 두 실수 x_1 과 x_2 에 대하여 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 이면, f 를 일대일함수라고 한다. 한편, 임의의 $y \in Y$ 에 대하여 $f(x) = y$ 인 $x \in X$ 가 존재하면, f 를 X 에서 Y 위로의 함수라고 한다.
f 가 X 에서 Y 위로의 함수이고 일대일함수이면, 일대일 대응이라고 부른다.

참고 함수 $f : X \to Y$ 가 일대일함수임은 다음과 같은 방법으로 증명할 수 있다.

「x_1, $x_2 \in X$ 이고, $f(x_1) = f(x_2)$ 이면, $x_1 = x_2$ 이다.」

참고 함수 $f:X\to Y$가 있다. 서로 다른 임의의 두 실수 x_1과 x_2에 대해, $f(x_1)\neq f(x_2)$이면, f를 단사함수(일대일함수)라고 부른다. 한편, 임의의 $y\in Y$에 대해, $f(x)=y$인 $x\in X$가 존재하면, f를 전사함수라고 부른다. f가 전사함수이고, 단사함수이면, 전단사함수(일대일대응)라고 부른다.

2. 예제 일대일 대응 $f: N\times N\to N$이 존재함을 보여라.

풀이

함수 $f: N\times N\to N$을 $f(m,\ n)=2^{m-1}(2n-1)$로 잡으면, f는 일대일 대응이다.◇

참고 위 예제의 함수는 임의의 $n\in N$에 대하여 $n=(2q-1)\cdot 2^p$ 을 만족하는 (p,q)가 존재하므로 전사함수가 된다.

3. 예제 자연수의 집합을 정의역과 치역으로 갖는 함수 $f(x)$중에서, 모든 n에 대하여 $f(f(n))=n+2003$을 만족하는 함수는 없음을 보여라.

풀이

조건을 만족하는 함수는 일대일 대응이어야 한다.

$1\le i\le 2003$에 대하여 $f(i)=a_i$라 하면

$$f(a_i)=i+2003,\ f(i+2003)=a_i+2003\ .$$

$f(i+2003)-f(i)=2003$이고 f는 일대일대응이므로 분명히 $1\le a_i\le 2\times 2003$이어야 한다.

$A=\{i\mid 1\le a_i\le 2003\}$, $B=\{i\mid 2004\le a_i\le 2\times 2003\}$이라 하면

$n(A\cup B)=2003$, $A\cap B=\phi$이므로

$$n(A)+n(B)=2003 \qquad \cdots\cdots①$$

$a_i\in A$이면 어떤 j에 대하여 $a_i=j$이므로

$$i+2003=f(a_i)=f(j)=a_j \qquad \therefore\ a_j\in B$$

$a_j\in B$이면 어떤 i에 대하여 $a_j=i+2003$이므로

$$f(j)=a_j=i+2003=f(a_i)$$

곧, $a_i=j$이면 $a_i\in A$.

위 사실에서 집합 A와 집합 B 사이에는 일대일대응이 이루어지므로

$$n(A)=n(B)$$

이것은 ①에 모순이므로 조건을 만족하는 함수 f는 존재하지 않는다.◇

다음은 함수방정식의 해를 구하는 데 있어, 수열과 수학적 귀납법이 중요한 수단이 될 수 있음을 보여주는 문제를 해결해 보자.

4. 예제 두 함수 $f,\ g : N \to N$이 있어서, 임의의 자연수 n에 대하여 $f(n) \geqq g(n)$ 을 만족한다고 한다. f는 N에서 N위로의 함수이고, g는 일대일함수일 때, 임의의 자연수 n에 대하여 $f(n) = g(n)$ 임을 증명하여라.

증명

f가 N에서 N 위로의 함수이므로, 임의의 $i \in N$에 대하여 $f(a_i) = i$ 인 자연수 수열 $\{a_n\}$ 을 잡을 수 있다. 임의의 $n \in N$에 대하여 $f(a_n) = g(a_n)$ 임을 귀납적으로 증명하자.

(i) $n = 1$ 일 때 : $1 = f(a_1) \geqq g(a_1) \in N$이므로 $g(a_1) = 1$ 이다.

따라서, $f(a_1) = g(a_1)$

(ii) $n = 1, 2, , \cdots, k$ 일 때 성립한다고 가정하자.

$f(a_{k+1}) \neq g(a_{k+1})$ 라 가정하자.

$k+1 = f(a_{k+1}) \geqq g(a_{k+1})$ 이므로, $k \geqq g(a_{k+1})$

그러면 k 이하의 자연수 i가 있어서, $g(a_{k+1}) = i = f(a_i) = g(a_i)$ 가 된다.

g가 일대일 함수이므로 $a_{k+1} = a_i$ 이다.

그러면, $k+1 = f(a_{k+1}) = f(a_i) = i$ 가 되어 i가 k 이하의 자연수라는 사실에 모순이다. 따라서, $f(a_{k+1}) = g(a_{k+1})$

이상에서, 임의의 $n \in N$에 대하여 $f(a_n) = g(a_n)$ 이 증명되었다.

이제, 임의의 $n \in N$에 대하여 $f(n) = g(n)$ 임을 증명하자.

n 을 임의의 자연수라 하자. $i = g(n)$ 이라 두면 $f(a_i) = g(n)$

그러면 $g(n) = f(a_i) = g(a_i)$ 인데, g가 일대일 함수이므로 $n = a_i$

$\therefore\ f(n) = f(a_i) = g(n)$.◇

정의1.1.6. 역함수

주어진 함수 f에 대하여, 임의의 $y \in Y$에 대하여 $f(g(y)) = y$이고, 임의의 $x \in X$에 대하여 $g(f(x)) = x$를 만족하는 함수 $g : Y \to X$가 있으면, 함수 g를 f의 역함수라 부르고, $g = f^{-1}$로 나타낸다. 그러므로 임의의 $y \in Y$에 대하여 $f(f^{-1}(y)) = y$이고, 임의의 $x \in X$에 대하여 $f^{-1}(f(x)) = x$이 성립한다.

5. 예제 $F=\{f:R\to R \mid f$ 는 일대일 대응 $\}$

$A=\{f\in F \mid$ 임의의 $g\in F$ 에 대하여 $f\circ g=g\circ f\}$

라 하자. 두 함수 f_1, f_2 가 f_1, $f_2\in A$ 이면, $f_1\circ f_2^{-1}\in A$ 임을 증명하여라.

증명

임의의 $g\in A$ 에 대하여,

$$(f_1\circ f_2^{-1})\circ g=f_1\circ(f_2^{-1}\circ g)=f_1\circ(g^{-1}\circ f_2)^{-1}=f_1\circ(f_2\circ g^{-1})^{-1}$$

$=f_1\circ(g\circ f_2^{-1})=(f_1\circ g)\circ f_2^{-1}=(g\circ f_1)\circ f_2^{-1}=g\circ(f_1\circ f_2^{-1})$ 이므로, $f_1\circ f_2^{-1}\in A$.◇

정의1.1.7. 가역함수

역함수가 존재하는 함수를 가역함수라 한다. 즉, 항등함수 i 와 함수 f 에 대하여

(1) $g\circ f=i_X$ (2) $f\circ g=i_Y$

을 만족하는 함수 $g=f^{-1}$가 존재하는 함수 f 를 가역함수라고 한다.

정리 1.1.1 가역함수와 일대일 대응

함수 f 의 역함수가 존재할 필요충분조건은 f 가 일대일 대응인 것이다.

증명

$\Leftarrow$ f 가 전사함수이므로 다음을 만족하는 $g:Y\to X$가 존재한다.

임의의 $y\in Y$에 대해, $y=f(g(y))$.

이제 임의의 $x\in X$에 대해, $x=g(f(x))$를 만족하면, $g=f^{-1}$ 임이 증명된다.

$x\in X$일 때, $f(x)\in Y$이므로 $y=f(x)$는 g 의 정의로부터

$y=f(g(y))\Rightarrow f(x)=f(g(f(x)))$.

한편, f 는 단사함수이므로 $x=g(f(x))$를 얻는다.

$\Rightarrow$ 가역함수 f 에 대하여

(1) $g\circ f=i_X$ (2) $f\circ g=i_Y$

을 만족하는 함수 $g=f^{-1}$가 존재한다.

임의의 $y\in Y$에 대하여, $f(g(y))=y$이므로

$g:Y\to X$인 $g(y)=x\in X$가 존해한다. 따라서, f 는 전사함수이다.

또, 임의의 $x\in X$에 대하여, $g(f(x))=x$이고,

$f(x_1)=f(x_2)$를 만족하는 $x_1\in X$, $x_2\in X$에 대하여

$g(f(x_1))=g(f(x_2))$이므로 $x_1=x_2$이다. 따라서, f 는 단사함수이다.◇

다음 문제는 함수방정식으로 주어진 함수가 일대일대응임을 증명하는 것이다. 함수 방정식을 다룰 때에는 보통 상수 0 또는 1을 대입하여 주어진 방정식을 다루기 쉽게 변형하는 것이 기본적이 방법이다. 즉, 주어진 방정식이 원하는 상수나 형태가 되도록 적절한 값 또는 변수를 대입해 보는 것이다. 예를 들어, $f(x-y)$에서 $y=x$를 대입하면 $f(0)$에 관한 식을 얻을 수 있다.

6. 예제 함수 $f : Q^+ \to Q^+$ 이 임의의 양의 유리수 x 와 y 에 대하여 $f(xf(y)) = \dfrac{f(x)}{y}$ 를 만족한다. 함수 f 가 일대일 대응임을 증명하여라.

(단, Q^+ 는 양의 유리수의 집합이다.)

증명 $f(xf(y)) = \dfrac{f(x)}{y}$ 임의의 $x,\ y \in Q^+$ …①

① 에 $x=1$ 을 대입하여, 임의의 $y \in Q^+$ 에 대하여

$$f(f(y)) = \frac{f(1)}{y} \quad \cdots②$$

먼저, f 가 일대일함수임을 증명한다. $x_1,\ x_2 \in Q^+$ 이고, $f(x_1) = f(x_2)$ 라 하자.

② 에 의해, $\dfrac{f(1)}{x_1} = f(f(x_1)) = f(f(x_2)) = \dfrac{f(1)}{x_2}$ 에서, $x_1 = x_2$

따라서, f 는 일대일함수이다. 이제, f 가 Q^+ 에서 Q^+ 위로의 함수임을 증명한다.

임의의 $x \in Q^+$ 에 대하여, $y = \dfrac{f(1)}{x}$ 를 ② 에 대입하여, $f(f(\dfrac{f(1)}{x})) = x$ 를 얻는다.

따라서, f 는 Q^+에서 Q^+ 위로의 함수이다. 이상에서, 함수 f 는 일대일대응이다.◇

정의1.1.8. 우함수와 기함수

함수 $f : R \to R$ 에 대하여, 임의의 실수 x 에 대하여 $f(x) = f(-x)$ 를 만족하면, f 는 우함수라고 부르고, 임의의 실수 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족하면, f 는 기함수라고 부른다. 함수 $f : R \to R$ 가 기함수이면 $f(0) = 0$ 이므로, $f(0)$ 의 값을 알 수 있다.

참고 우함수의 그래프는 좌표평면에서 y축에 대칭이며, 기함수의 그래프는 좌표평면에서 원점에 대칭인 기하학적 의미를 가지고 있다. 다음 예제에서 우리는 임의의 함수로 우함수과 기함수를 만들 수 있음을 보게 될 것이다.

■ 연 습 문 제 ■

1. 정수 전체의 집합 Z에 대하여 다음과 같은 함수가 존재하지 않음을 증명하여라.[1)]

$$f: Z \to Z,\ \ f(f(x)) = x + 1$$

2. R에서 $R - N$으로 가는 전단사함수의 예를 들고, 그 함수 f가 전단사함수임을 증명하여라.[2)]

3. 임의의 자연수 n에 대하여 함수 $y = f(x)$가 다음 성질을 만족한다.

$$f(1) = 1,\ f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n) = n^2\ f(n)$$

$f(2000)$을 구하여라.[3)]

4. 다음 조건을 만족시키는 일대일 함수 $f : R \to R$을 모두 구하여라.[4)]

$$f(x^2) - f(x)^2 \geq \frac{1}{4},\ \ x \in R$$

5. $f : N \to N$가 $f(f(m) + f(n)) = m + n, m, n$은 자연수 일 때, $f(n) = n,\ \forall n \in N$임을 보여라.[5)]

6. $f : N \to N$에서 다음의 두 조건을 만족하는 함수 $f(x)$를 구하여라.[6)]

(ⅰ) $f(xf(y)) = yf(x)$

(ⅱ) $x > y$ 이면 $f(x) > f(y)$

제5장 연습문제 풀이

제1장 함수의 기본성질 ◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆

1) 풀이

$f(f(f(x)))=f(x+1)=f(x)+1$

$f(0)=a$ (a : 정수)라 하면

$f(x+1)=f(x)+1$에서

$f(x)=a+x,\ \forall x\in Z$

$f(f(x))=x+2a,\quad \therefore\ 2a=1,\ a=f(0)=\frac{1}{2}$

이것은 정수가 아니므로 모순이다.

따라서 위와 같은 함수는 존재하지 않는다.◇

2) 증명

$f:R\to R-N$을 $x\in N$이면 $f(x)=2x-\frac{1}{2}$, $x\in R-N$이면, $f(x)=x$ 으로 잡으면, f는 전단사함수임을 쉽게 알 수 있다.◇

3) 풀이

$f(1)=1,\ f(2)=\frac{1}{3}$

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)=n^2\ f(n)$에서

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n-1)=(n^2-1)f(n)$

$$\therefore\ f(n)=\frac{f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1)}{n^2-1}=\frac{(n-1)^2 f(n-1)}{(n-1)(n+1)}$$

$$=\frac{n-1}{n+1}\cdot f(n-1)$$ (수학적 귀납법으로 증명 또는 점화식으로 계산 가능)

$$=\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{2}{(n-1)n}=\frac{2}{n(n+1)}$$

$$\therefore\ f(2000)=\frac{2}{2000(2001)}=\frac{1}{2001000}$$.◇

4) 풀이 $x^2=x$일 때, 즉, $x=0$ 또는 $x=1$일 때, 다음이 성립한다.

$(f(x)-\frac{1}{2})^2\le 0,\ f(0)=f(1)=\frac{1}{2}$

그러므로, f는 일대일 함수가 될 수 없다.◇

5) 풀이